Emissione di Radiazione da Particelle Cariche in Moto Relativistico
Una visione personale

Michele Castellano
LNF-INFN
(19/09/2007)

1 – Premessa

Queste pagine non sono un libro di testo e non hanno alcuna pretesa di essere esaustive ne' formalmente ineccepibili.
La loro lettura, inoltre, presuppone una conoscenza non solo superficiale dei processi radiativi come illustrati in qualunque buon libro di testo di elettromagnetismo classico, ad esempio il Capitolo 14 di
J.D. Jackson – Classical Electrodynamics – John Wiley & Sons
di cui seguiro' in gran parte la notazione.
L'obiettivo che mi propongo e' invece di dare delle spiegazioni intuitive a certi fenomeni in modo da renderne piu' facilmente comprensibili le conseguenze. Per ottenere questo risultato, partiro' da semplificazioni che risultano sostanzialmente corrette per condizioni particolari su alcuni parametri, condizioni che trovano pero' ampia corrispondenza nelle sitazioni sperimentali di interesse. Queste descrizioni intuitive possono essere quindi usate direttamente per ottenere risultati quantitativi in un ampio range di situazioni, ma permettono in ogni caso di capire meglio il fenomeno anche quando per una corretta valutazione quantitativa ci si deve rivolgere alle equazioni piu' generali.
La maggior parte degli esempi discussi deriva dalla misura ed utilizzo di fasci di elettroni relativistici, anche se ci sara' qualche deviazione in settori diversi.

2 - Introduzione

Il campo elettromagnetico generato da una particella puntiforme carica in moto relativistico e' dato dai potenziali ritardati di Lienard-Wiechert:

$$\Phi(\mathbf{x},t)=\left[\frac{e}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})R}\right]_{ret} \qquad \mathbf{A}(x,t)=\left[\frac{e\boldsymbol{\beta}}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})R}\right]_{ret}$$

in cui il suffisso "ret" sta ad indicare che il contenuto delle parentesi deve essere valutato ad un tempo t'=t-R/c ed in cui

e	e' la carica della particella
$\boldsymbol{\beta}$	e' $\mathbf{v}/c$ la velocita' della particella normalizzata a quella della luce
$\mathbf{n}$	e' il versore della direzione tra $P(t')$ e il punto di osservazione
R	e' la distanza tra $P(t')$ ed il punto d'osservazione

Da questi potenziali si possono ricavare i campi in forma esplicita, di cui una versione particolarmente utile e' la seguente, con le stesse notazioni precedenti:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = e\left[\frac{\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}}{\gamma^2(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^3 R^2}\right]_{ret} + \frac{e}{c}\left[\frac{\mathbf{n}\times\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^3 R}\right]_{ret} \qquad (1)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]_{ret}$$

Il primo termine del secondo membro della (1) rappresenta il campo coulombiano di una particella in moto uniforme, senza alcuna parte radiativa. Il secondo termine invece descrive la parte radiativa determinata dalla presenza di un'accelerazione della particella.
Queste equazioni sono ben conosciute, come pure tutte le derivazioni che si possono fare dalle stesse nei vari casi pratici, e sono di valore generale.
Il partire pero' da queste equazioni, anche se corrette, tende a mettere in particolare evidenza la dipendenza dell'irraggiamento elettromagnetico dalla dinamica della particella carica, facendo dimenticare una condizione essenziale per la loro validita', e cioe' che il moto della particella si svolga nel vuoto, in modo che nessuna parte del suo campo venga in contatto con altre particelle o mezzi materiali. Questa condizione e' sempre espressa esplicitamente nei libri di testo, ma puo' venire facilmente ignorata se l'attenzione si concentra esclusivamente sul moto della particella carica.
In realta' un processo radiativo e' sempre dovuto ad una discontinuita' (variazione) del campo e.m. della particella, ed e' questa discontinuita' la sorgente stessa del campo radiante. Guardando quindi al campo, alla sua discontinuita' come sorgente di un nuovo campo in evoluzione libera, cioe' sganciato dal vincolo della dinamica della particella, si possono avere delle visioni qualitative molto intuitive del processo di irraggiamento, e spesso anche molto accurate quantitativamente. Assumendo il campo come punto di partenza, e' anche facile tener conto delle situazioni in cui il moto della particella non si svolga nel vuoto o siano presenti materiali con cui il campo stesso interagisce, anche se non sono sulla traiettoria della particella.
Questa e' la cosiddetta "approssimazione di Weizsacker-Williams" o dei fotoni virtuali, e consiste nel considerare il campo di una particella come sovrapposizione di "pseudo" onde piane di diversa frequenza (fotoni).
Una descrizione dettagliata del metodo e dei suoi limiti di validita' e' reperibile su qualunque testo avanzato di Elettromagnetismo. Io mi limitero' a sottolineare alcuni aspetti che saranno utili nel seguito.
Una prima osservazione, abbastanza ovvia ma che merita di essere sottolineata, e' che una carica in quiete genera, per un osservatore qualsiasi, un campo elettrico indipendente dal tempo, e che quindi non ha alcun contenuto in frequenza tranne quello a $\omega=0$.
Se invece la carica q e' in moto rettilineo uniforme rispetto all'osservatore, posto ad una distanza b dalla direzione di moto, il campo elettrico avvertito sara' dipendente dal tempo, e quindi con un contenuto di frequenze, generando nel contempo anche un campo magnetico. In particolare, per effetto relativistico, le linee di forza del campo verranno deformate come mostrato in Fig. 1, concentrandosi sempre di piu' intorno alla direzione trasversa al moto all'aumentare della velocita' della particella, o meglio di γ.
La struttura temporale della componente trasversa e longitudinale del campo avvertito dall'osservatore e' poi mostrata in Fig. 2.

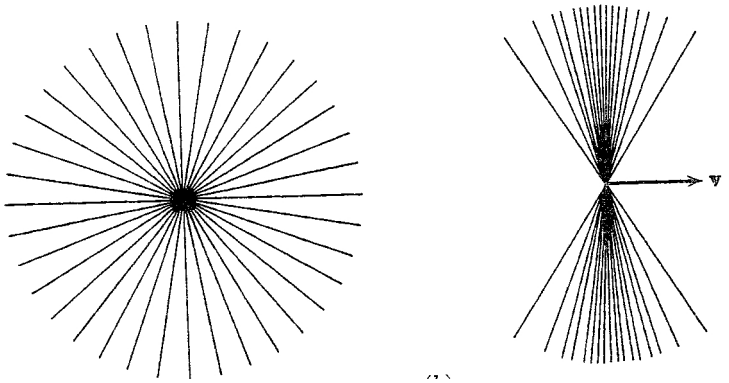

Fig. 1 – Distribuzione delle linee di forza del campo elettrico per una carica ferma e per una carica in moto rettilineo uniforme (γ=3, E=1 MeV per un elettrone)

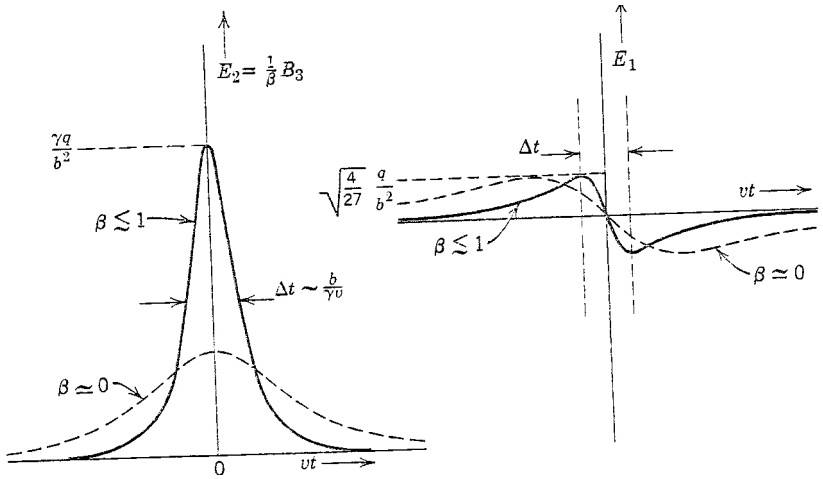

Fig. 2 – Distribuzione temporale dell'impulso elettrico, rispettivamente la componente trasversa e quella longitudinale, sentito da un osservatore a distanza b dalla traiettoria di una particella di carica q e fattore relativistico γ [Da Jackson op. cit.].

Dalla Fig. 2 si vede che l'intensita' massima del campo trasverso cresce con γ, mentre la sua durata diminuisce, mantenendo costante l'area. Il campo longitudinale ha integrale zero, ampiezza massima costante e durata decrescente con l'energia.
La forma analitica dei campi e' data da:

$$\mathbf{E_l} = \frac{\mathbf{q\gamma vt}}{\left(\rho^2 + \gamma^2 \mathbf{v}^2 \mathbf{t}^2\right)^{3/2}}$$

$$\mathbf{E_t} = \frac{\mathbf{\gamma q \rho}}{\left(\rho^2 + \gamma^2 \mathbf{v}^2 \mathbf{t}^2\right)^{3/2}} \qquad (2)$$

$$\mathbf{B_t} = \beta \times \mathbf{E_t}$$

In cui ρ e' la distanza dalla traiettoria della particella di carica q e velocita' v.
Il campo B_t e' trasverso sia alla velocita' della particella che al campo elettrico E_t.
Per energie relativistiche, quindi, il campo totale tende ad essere un campo trasversale alla direzione di moto della carica e composto da un campo elettrico ed uno magnetico ortogonali l'uno all'altro. Una specie di onda elettromagnetica piana, ma con alcuni aspetti che la differenziano sostanzialmente dalla classica onda piana.
La trasformata di Fourier del campo elettrico trasversale dato dalla (2) e' infatti:

$$\mathbf{E_t}(\omega,\rho) = \frac{1}{\pi}\frac{\omega}{\mathbf{v}^2\gamma}\mathbf{K}_1\left(\frac{\omega\rho}{\mathbf{v}\gamma}\right)$$

In cui K_1 e' la funzione di Bessel modificata di prima specie di ordine 1, detta anche funzione di Hankel.
Questa funzione, nella sua dipendenza dalla distanza dalla traiettoria, ha una divergenza del tipo $1/\rho$, per cui l'andamento dell'integrale del campo $2\pi\int \mathbf{E_t}\rho\mathbf{d}\rho$ in funzione di $x=\frac{\omega\rho}{\gamma\mathbf{v}}$, normalizzata al totale, ha l'andamento di Fig 3.

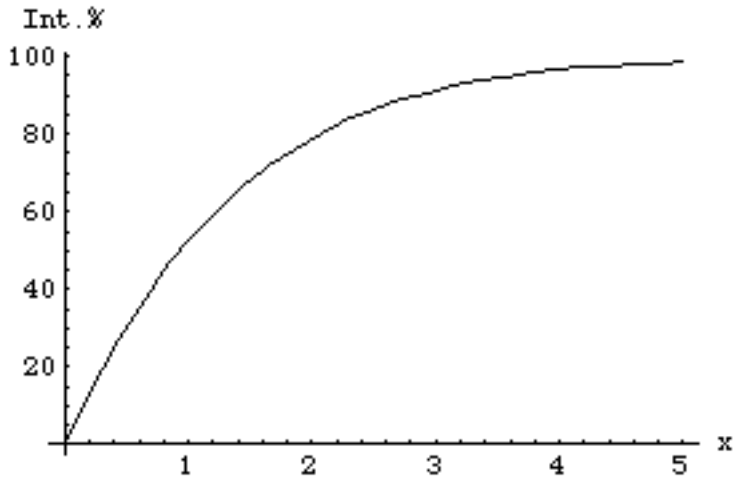

Fig. 3 – Frazione del campo elettrico contenuta in un raggio $x=\frac{\omega\rho}{\gamma\mathbf{v}}$

da cui risulta che il 50% del campo e' contenuto nel raggio x=1, cioe' $\rho = \frac{\lambda\gamma}{2\pi}$. Mentre piu' del 95% e' contenuto nel raggio $\rho = \gamma\lambda$.
In altre parole, il campo ad una certa lunghezza d'onda e' tanto piu' esteso trasversalmente quanto maggiore e' l'energia, ma a parita' di energia la sua estensione e' proporzionale alla lunghezza d'onda.
Inoltre questa "onda elettromagnetica" viaggia legata alla particella, e quindi con velocita' v, e non c, nella direzione di moto della particella stessa.
Tenendo conto di questa evoluzione, il capo elettrico in tutto lo spazio, puo' essere scritto come:

$$\mathbf{E_t}(\omega,\rho,\mathbf{z}) = \frac{1}{\pi}\frac{\omega}{\mathbf{v}^2\gamma}\mathbf{K}_1\left(\frac{\omega\rho}{\mathbf{v}\gamma}\right)\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\mathbf{w}}{\mathbf{v}}\mathbf{z}} \qquad (3)$$

In coordinate cartesiane, utili quando la geometria non e' a simmetria assiale, si ha semplicemente

$$\mathbf{E_{x,y}}(\omega,\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \frac{1}{\pi}\frac{\omega}{\mathbf{v}^2\gamma}\frac{\mathbf{x},\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2}}\mathbf{K}_1\left(\frac{\omega\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2}}{\mathbf{v}\gamma}\right)\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\mathbf{w}}{\mathbf{v}}\mathbf{z}} \qquad (4)$$

Se si considera questa onda come composta di “fotoni virtuali”, di energia $\frac{\hbar\omega}{2\pi}$, bisogna anche considerare che, data la sua estensione limitata nel piano trasverso, la direzione dei suddetti fotoni non puo’ essere limitata alla direzione di propagazione dell’onda, ma avranno necessariamente una componente trasversale. Effettuando una trasformata della (4) nel campo degli impulsi trasversi dei fotoni virtuali, in generale il campo elettrico di una particella carica in moto rettilineo uniforme si puo’ scrivere come:

$$\mathbf{E}_{x,y}(\omega,\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \frac{-\mathbf{i}}{2\pi^2\mathbf{v}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\omega}{\mathbf{v}}\mathbf{z}}\int\frac{\chi_{x,y}\mathbf{e}^{\mathbf{i}(\chi_x\mathbf{x}+\chi_y\mathbf{y})}}{\chi_x^2+\chi_y^2+\frac{\omega^2}{\mathbf{v}^2\gamma^2}}\mathbf{d}\chi_x\mathbf{d}\chi_y \tag{5}$$

del tutto equivalente alla (4).
Questa approssimazione del campo di una particella in moto uniforme, descritto dalle (4) e (5), e’ sufficiente per capire moltissimi fenomeni di generazione di radiazione elettromagnetica, specialmente nell’interazione con delle condizioni al contorno.

3 - La Bremsstrahlung istantanea

Il primo esempio, che servira’ di base per molte altre considerazioni, per cui mi dilunghero’ un poco nel suo esame, e’ la cosiddetta “bremsstrahlung istantanea”, cioe’ la radiazione emessa quando una particella in moto uniforme si ferma istantaneamente.
Per quanto questo fenomeno possa sembrare irrealistico, nella realta’ e’ un’approssimazione che puo’ essere usata piuttosto spesso, sia nella sua versione letterale, di un brusco arresto della particella, sia nella sua versione equivalente, dal punto di vista radiativo, di un improvvisa schermatura, e quindi scomparsa, del suo campo elettromagnetico. Questo perche’ l’arresto puo’ essere ritenuto “istantaneo” per tutte le onde di periodo e lunghezza d’onda molto maggiori del tempo e dello spazio dell’arresto vero e proprio.
In generale, se l’accelerazione di una particella e’ limitata nel tempo e nello spazio, la distribuzione angolare ed in frequenza della radiazione emessa, partendo dal campo elettrico dato dalla (1), puo’ essere scritta, a grande distanza dalla zona dove avviene l’accelerazione, come:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{I}}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{e}^2}{4\pi^2\mathrm{c}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{n}\times\left[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]}{(1-\boldsymbol{\beta}\bullet\mathbf{n})^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\mathrm{t}-\mathbf{n}\bullet\mathbf{r}(\mathrm{t})/\mathrm{c})}\mathrm{dt}\right|^2 \tag{6}$$

in cui **r**(t) e’ il vettore di posizione della particella durante il periodo di accelerazione.
Nel caso di una carica in moto rettilineo uniforme che si arresta istantaneamente, l’esponenziale diventa una costante.
D’altra parte si ha anche che

$$\frac{\mathbf{n}\times\left[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]}{(1-\boldsymbol{\beta}\bullet\mathbf{n})^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta})}{1-\boldsymbol{\beta}\bullet\mathbf{n}}\right]$$

per cui il risultato finale e':

$$\frac{d^2I}{d\omega d\mathbf{\Omega}} = \frac{e^2}{4\pi^2 c}\left|\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta})}{1-\boldsymbol{\beta}\bullet\mathbf{n}}\right|_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} e^{i\omega t_0}\Bigg|^2 \tag{7}$$

in cui t_0 e' l'istante in cui avviene l'arresto. Il termine $e^{i\omega t_0}$ e' quindi una fase arbitraria che puo' essere del tutto trascurata.
Se $\beta(t_0-\varepsilon)=\beta_0$ e' la velocita' prima dell'arresto e $\beta(t_0+\varepsilon)=0$ quella dopo, sara'

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c}\left(-\frac{\beta_0 \mathrm{Sin}(\vartheta)}{1-\beta_0 \mathrm{Cos}(\vartheta)}\right)^2 \tag{8}$$

Nella (8) θ e' l'angolo tra la direzione della radiazione e quella di β, si e' inoltre mantenuto il segno meno all'interno della parentesi per indicare che si tratta di una "ampiezza" derivante da un'accelerazione negativa. Infatti la stessa identica distribuzione di radiazione si avrebbe nel caso di una carica che apparisse improvvisamente dal nulla con una velocita' β_0.
Questa situazione e' fisicamente rilevabile sia in senso indiretto, quando la schermatura del campo di una particella viene improvvisamente meno, sia in modo diretto nel caso di decadimento beta di una particella o di un nucleo, in cui un elettrone (o positrone) appare improvvisamente, ed e' accompagnato esattamente da questo tipo di radiazione elettromagnetica.
In questo caso pero' l'ampiezza ha segno positivo, perche' deriva da un aumento di velocita'. Se prese indipendentemente, il risultato finale e' indifferente al segno, dipendendo dal modulo quadro di questa ampiezza, ma ci sono casi importanti, come vedremo in seguito, in cui entrambe le ampiezze sono presenti contemporaneamente, e quindi devono essere valutate col loro segno.

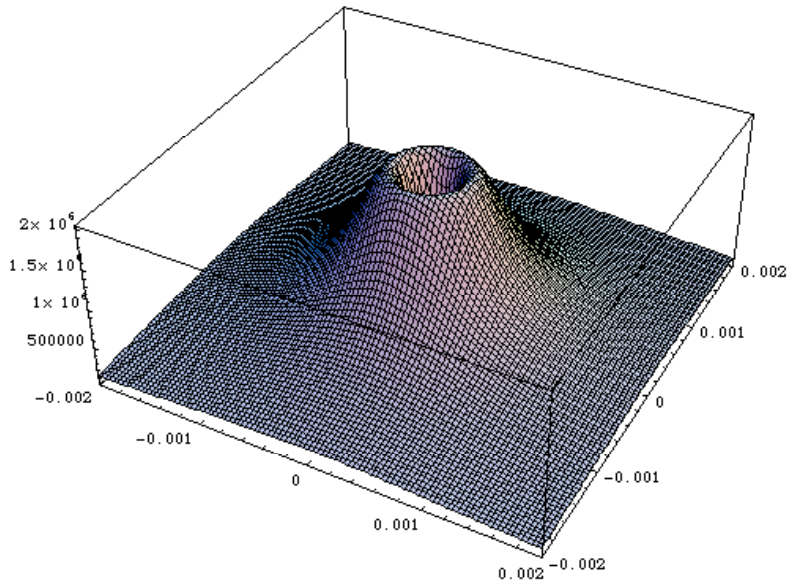

Fig. 4 – Distribuzione angolare della "bremsstrahlung istantanea" data dalla (8). L'intensita' e' arbitraria, mentre gli assi sono in [mrad]. La figura e' calcolata per un γ di 2000, corrispondente ad un elettrone da 1 GeV.

La distribuzione angolare data dalla (8) e' mostrata in Fig. 4, mentre in Fig. 5 e' mostrato l'andamento lungo una retta passante per l'origine.

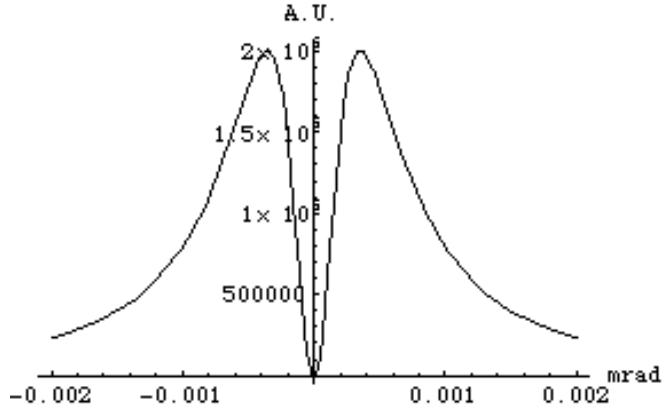

Fig. 5 – Distribuzione angolare data dalla (8) in un piano passante per l'origine.

Le caratteristiche principali di questa radiazione sono che, almeno finche' vale l'approssimazione con cui e' ottenuta, la sua intensita' non dipende dalla frequenza, e' una radiazione "bianca". La sua distribuzione angolare ha uno zero nella direzione del moto della particella e un massimo, anch'esso indipendente dalla frequenza, ad un angolo $\theta=1/\gamma$, come puo' essere verificato dalla (8) o ancora meglio dalla sua approssimazione per $\gamma>>1$ e $\theta<<1$:

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} \approx \frac{e^2}{4\pi^2 c}\left(\frac{2\gamma^2\vartheta}{1+\gamma^2\vartheta^2}\right)^2$$

Queste caratteristiche, insieme con altri aspetti, si capiscono meglio se si considera che questa radiazione non e' altro che il risultato della libera propagazione del campo dato dalla (5) (o dalla (4) che e' equivalente) e dal suo compagno campo magnetico. Come detto nell'introduzione, la radiazione elettromagnetica di una particella carica puo' sempre essere considerata come generata da una discontinuita' del campo della particella stessa. In questo caso si ha che l'intero campo della particella dovrebbe scomparire, perche' questa si ferma d'improvviso. Per mantenere la sua continuita', nasce un campo radiativo, uguale a quello della particella nel momento dell'arresto, che si propaga liberamente. Nell'approssimazione dei fotoni virtuali si ha che questi diventano fotoni reali e si propagano come qualsiasi onda elettromagnetica. Non essendo pero' una vera onda piana, la sua propagazione da' luogo alla distribuzione angolare data dalla (8). Alcune questioni sottili riguardanti la divergenza del campo originario sull'asse di simmetria, e la mancanza di tale divergenza nel campo radiativo, verranno analizzate in seguito.
Formalmente, la distribuzione angolare del campo elettrico nell'approssimazione di Fraunhofer e' data da

$$\mathbf{E}_{x,y}\left(\mathbf{k}_x,\mathbf{k}_y\right) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_S \mathbf{E}_0(\omega,\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}\mathbf{dS} \qquad (9)$$

dove E_0 e' il campo dato dalla (5) e l'integrale e' esteso su tutto il piano z=0, dove cioe' la particella si ferma. L'intensita' sara' poi data da

$$\frac{d^2I}{d\omega d\boldsymbol{\Omega}} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c}|E|^2 = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c}\left(|E_x|^2 + |E_y|^2\right)$$

Il calcolo e' piuttosto laborioso, per la presenza della divergenza sull'asse, ma il risultato finale e' esattamente la (8).
Il considerare la radiazione come la libera propagazione dell'intero campo della particella, intero campo in questo caso di istantaneo arresto, porta a capire abbastanza intuitivamente le proprieta' della radiazione stessa.
Ad esempio, lo zero che l'intensita' della radiazione ha sull'asse di propagazione e' facilmente spiegato dalla natura vettoriale del campo elettrico che, nella (4), ha polarizzazione radiale. Per cui lungo l'asse z per ogni contributo da un punto di coordinate {x,y} del fronte d'onda in propagazione, esiste un contributo, identico in ampiezza ma di segno opposto, dal punto di coordinate {-x,-y}.
Anche il fatto che la distribuzione angolare sia indipendente dalla lunghezza d'onda e abbia un'apertura angolare dell'ordine di $1/\gamma$ e' facilmente comprensibile in base alle semplici leggi dell'evoluzione ondulatoria. E' cosa nota che un fronte d'onda concentrato in un raggio piccolo tendera' ad evolvere con un'apertura angolare maggiore di uno con raggio maggiore. Nel caso di fasci ottici gaussiani, come per i laser, l'angolo di apertura asintotico in caso di propagazione libera nel vuoto e' dato da $\vartheta = \lambda / \mathbf{r}$ in cui r e' il raggio minimo. Nel nostro caso, in cui non si tratta di fasci gaussiani ma in cui si ha lo stesso andamento, abbiamo che il raggio di partenza e' $\mathbf{r} = \gamma\lambda$ per cui risulta $\vartheta = 1/\gamma$ indipendente dalla lunghezza d'onda, come espresso dalla (8). E' cioe' l'estensione del campo sorgente proporzionale alla lunghezza d'onda che determina la distribuzione angolare asintotica indipendente da questa.
Qualcosa di piu' si capisce anche se si considera la radiazione che si propaga da un solo semipiano, ad esempio il semipiano y>0. Anche se la cosa puo' sembrare un puro artificio matematico, esistono in realta' delle situazioni sperimentali per cui questa e' una buona approssimazione, ma le vedremo piu' in avanti.
Integrando la (9) in x tra $\{-\infty, \infty\}$ e in y tra $\{0, \infty\}$, si ottiene un comportamento molto diverso delle due polarizzazioni:

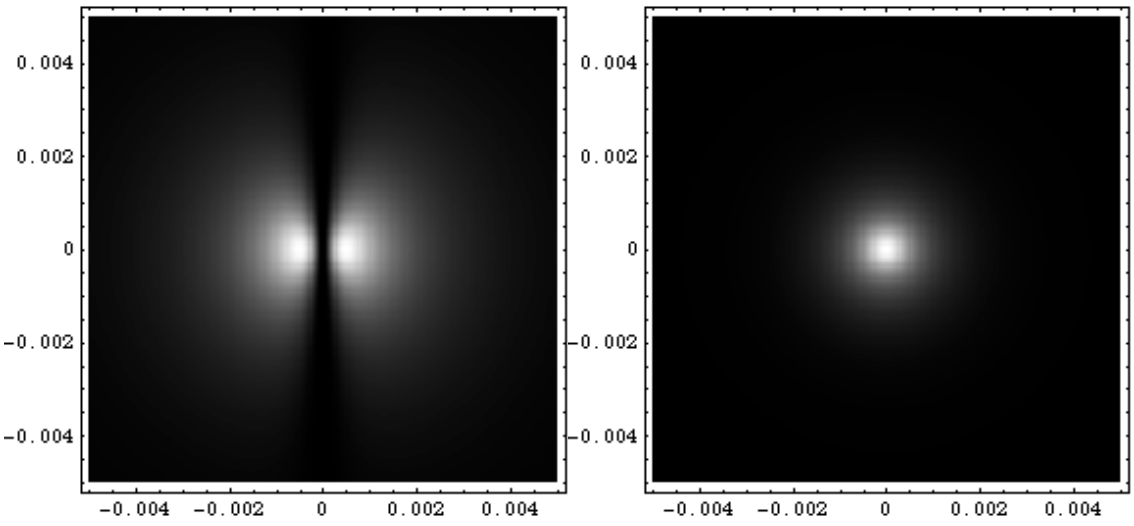

Fig. 6 – Distribuzione angolare della radiazione emessa da un singolo semipiano y>0 in una breemsstrahlung istantanea. A sinistra la componente E_x con polarizzazione parallela al bordo del semipiano, a destra la componente E_y con polarizzazione perpendicolare. Ascisse e ordinate sono in radianti per una particella con 1 GeV di energia.

La componente parallela Ex, poiche' il campo cambia ancora di segno per x<0 e x>0, presenta sempre uno zero sull'asse, mentre la componente verticale, che mantiene lo stesso

segno per tutto il semipiano y>0, ha ora il suo valore massimo proprio sull'asse. E' quindi evidente che la distribuzione angolare di Fig. 4 e' dovuta alla polarizzazione radiale del campo di una carica puntiforme e dall'essere l'evoluzione dell'intero campo.
A parte una costante di proporzionalita' uguale per entrambe le componenti, le espressioni analitiche delle due distribuzioni angolari da un semipiano sono:

$$\frac{dI_{\parallel}}{d\omega d\Omega} \propto \frac{Sin^2\vartheta Cos^2\varphi}{k^2\left(Sin^2\vartheta Cos^2\varphi + \frac{1}{\beta^2\gamma^2}\right)\left(Sin^2\vartheta + \frac{1}{\beta^2\gamma^2}\right)}$$
$$\frac{dI_{\perp}}{d\omega d\Omega} \propto \frac{1}{k^2\left(Sin^2\vartheta + \frac{1}{\beta^2\gamma^2}\right)} \qquad (10)$$

Alcuni dettagli di queste distribuzioni, che possono essere interessanti per un'analisi piu' avanzata, verranno esaminati a parte.

4 – Variazione di velocita'

Un caso lievemente piu' complesso della bremsstrahlung istantanea e' quello di un'improvvisa variazione di velocita' da parte di una particella.
Incominciamo con il caso di una semplice variazione del modulo della velocita', senza cambio di direzione. In questo caso dalla (7) si ha direttamente:

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c}\left(\frac{\beta_2 Sin(\vartheta)}{1-\beta_2 Cos(\vartheta)} - \frac{\beta_1 Sin(\vartheta)}{1-\beta_1 Cos(\vartheta)}\right)^2 \qquad (11)$$

Il cui β_1 e' la velocita' iniziale e β_2 quella finale.
Cioe' il processo di emissione puo' essere considerato come la somma delle ampiezze di una particella con velocita' β_1 che si ferma improvvisamente (e l'ampiezza avra' segno negativo) e di una particella che si mette improvvisamente in moto con velocita' β_2. Poiche' arresto e ripartenza sono contemporanei, la differenza di fase tra le due ampiezze e' zero. L'intensita' sara' il modulo quadro dell'ampiezza totale.
Questo principio di considerare l'ampiezza totale della radiazione dovuta ad una variazione di velocita' come la somma dell'ampiezza dovuta ad uno stop improvviso e di quella dovuta alla ripartenza e' valido anche nel caso di una variazione di direzione della velocita' iniziale.
E' ancora quindi dalla (7) che bisogna partire, ma nella sua intera forma vettoriale. Se il principio rimane semplice, la distribuzione angolare si complica abbastanza, come si vede in Fig. 7 dove sono confrontate le distribuzioni angolari dovute nel primo caso ad un arresto istantaneo, e nel secondo dalla deviazione di 1 mrad da parte sempre di un elettrone da 1 Gev. Poiche' le due ampiezze hanno fase contraria, nelle zone angolari dove il campo avrebbe per entrambe lo stesso segno e valore abbastanza uguale si ha una cancellazione quasi totale, mentre sono esaltate le zone dove il segno opposto, per la simmetria radiale, viene invece compensato dallo sfasamento.
Nel caso di un angolo maggiore di $1/\gamma$, che e' l'apertura angolare naturale di ogni singola ampiezza, le due distribuzioni tendono a separarsi, come e' mostrato in Fig. 8 per un γ di 2000 e una deviazione di 5 mrad.

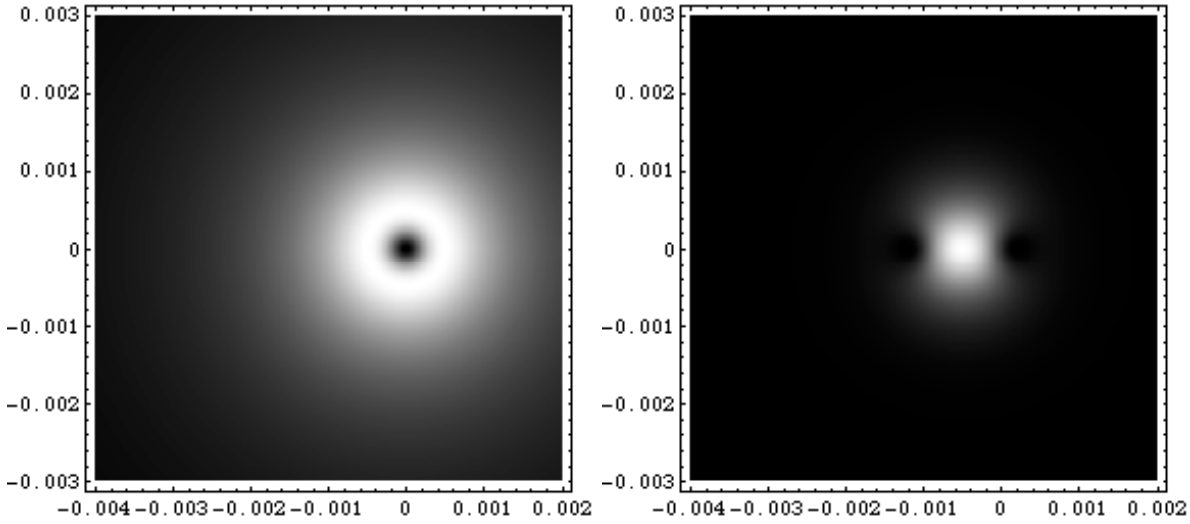

Fig. 7 – Distribuzione angolare della radiazione dovuta ad un arresto improvviso (a sinistra) e distribuzione angolare della radiazione emessa per una deviazione istantanea di 1 mrad da parte di un elettrone di 1 Gev (a destra).

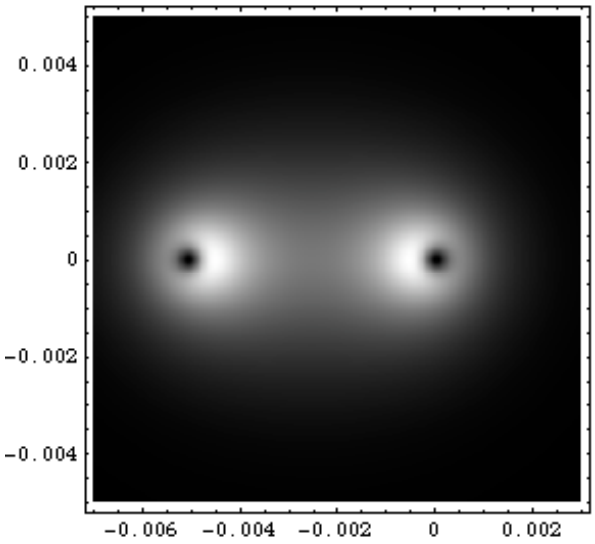

Fig. 8 – Distribuzione angolare dovuta alla deviazione di 5 mrad di un elettrone di 1 Gev (γ=2000)